Pripreme za državno takmičenje učenika srednjih škola
tema: Teorija brojeva
predavač: Srdjan Stefanović
Sabačka gimnazija, 5.3.2018.

1.[I razred, A kategorija, okružno 2018.] Ako su a, b i c prirodni brojevi takvi da su brojevi $24^a + 2^b + 2018^c$ i $10^c + 3^a + 2018^b$ deljivi sa 7, dokazati da broj $30^b + 3^c + 2018^a$ nije deljiv sa 7.
2.[III razred, B kategorija, okružno 2018.] Dokazati da jednačina

$$\sqrt{x^2 + 3x + 1} + \sqrt{y^2 - y + 3} = 2017$$

nema rešenja u skupu celih brojeva.
3.[IV razred, B kategorija, državno 2017.] Ako je $n^2 + 2^n$ prost broj za neki prirodan broj $n > 1$, dokazati da je n deljiv sa 3, ali nije deljiv sa 6.
4.[I razred, A kategorija, okružno 2017.] Odrediti sve prirodne brojeve n koji imaju sledeća svojstva: n je deljiv sa 2, ali ne i sa 4, zbir cifara broja n je jednak 6, broj delilaca broja n je jednak 8, zbir delilaca broja n je deljiv sa 10 i n ne daje ostatak 12 niti 14 pri deljenju sa 16.
5.[IV razred, B kategorija, okružno 2017.]Dokazati da $2017^{2017} + 19$ nije potpun stepen(veći od prvog) nijednog prirodnog broja.
6.[III razred, A kategorija, opštinsko 2017.] Dokazati da je za svako $n \in \mathbb{N}$ broj $2^n + 3^{n+3} + 5^n + 7^{n+4}$ složen.
7.[II razred, B kategorija, državno 2016.] Odrediti sve prirodne brojeve n za koje je

$$1 + 2 \cdot 3^n + 10^n + 19^n$$

potpun kvadrat prirodnog broja.
8.[IV razred, B kategorija, državno 2016.] Prirodan broj n ima sledeću osobinu: za svako k iz intervala $2 \leq k \leq m$ (gde je m unapred fiksiran prirodan broj) broj kn je potpun $k - ti$ stepen (drugim rečima, $2n$ je potpun kvadrat, $3n$ je potpun kub,...,mn je potpun $m - ti$ stepen). Odrediti najveći prirodan broj m za koji postoji takav prirodan broj n.
9.[I razred, A kategorija, okružno 2016.] Naći sve prirodne brojeve n za koje je $7 \cdot 2^n + 1$ potpun kvadrat.
10.[II razred, A kategorija, okružno 2016.] Naći sve prirodne brojeve n za koje je $n! - 44$ potpun kvadrat.
11.[III razred, B kategorija, državno 2012.] Neka je $f(x) = x^4 - 5x^2 + 67$, za $x \in \mathbb{N}$. Odrediti sve proste brojeve p za koje je zbir cifara broja $f(p)$ najmanji mogući.
12. Ako se prirodan broj n završava sa 133, tada n ima prost faktor veći od 7. Dokazati.