Pripreme za državno takmičenje učenika srednjih škola
tema: Kombinatorika
predavač: Srdjan Stefanović
Sabačka gimnazija, 6.3.2018.

1.[I razred, A kategorija, opštinsko 2018.] Matematička komisija se sastoji od $2n$ članova, $n \geq 3$. Poznato je da je svaki član komisije u svadji s tačno jednim drugim članom komisije (ova relacija je simetrična). Na koliko načina je moguće podeliti komisiju u tri odbora: jedan za sastavljanje zadataka, jedan za ocenjivanje zadataka i jedan za organizaciju takmičenja, tako da svaki odbor ima bar dva člana i da nikoja dva člana komisije koja su u svadji ne budu u istom odboru?
2.Odrediti broj rešenja jednačine $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ u skupu:
a)$\mathbb{N}$;
b)$\mathbb{N}_0$.
3.[IV razred, B kategorija, državno 2011.]Koliko rešenja u skupu prirodnih brojeva ima jednačina $x + y + z = 2011$ takvih da je $x \geq 19$ i $y \geq 3$?
4.[III razred, B kategorija, državno 2017.]Odrediti broj načina da se prirodan broj n predstavi kao zbir nekoliko (dva ili više) prirodnih brojeva, pri čemu je bitan poredak. (Na primer, za $n = 4$ imamo sledeće mogućnosti:$3+1, 2+2, 1+3, 2+1+1, 1+2+1, 1+1+2, 1+1+1+1$,tj. ukupno 7 traženih načina.)
5.[IV razred, B kategorija, drzavno 2015.]Odrediti koliko ima n-torki $(x_1, x_2, ..., x_n)$ kod kojih je svaka koordinata iz skupa $\{0, 1, 2\}$ i pritom je zbir $x_1+x_2+\ldots+x_n$ paran.
6.[IV razred, B kategorija, državno 2014.]Tri matematičara imaju šešire na kojima su napisani neki prirodni brojevi. Njima je poznato da je jedan od brojeva jednak zbiru druga dva broja, i pri tome svaki matematičar vidi brojeve ispisane na šeširima druge dvojice, ali ne i na svom. Prvi kaže: ,,Ja ne znam koji je broj na mom šeširu", na šta drugi izjavljuje: ,,Ni ja ne znam koji je broj na mom". Zatim prvi konstatuje: ,,Ja sada znam koji je broj na mom šeširu", a drugi zaključuje: ,,Onda na mom šeširu mora biti broj 2014". Koji su brojevi napisani na šeširima?
7.[IV razred, B kategorija, državno 2013.]Za date prirodne brojeve n i k, koliko ima uredjenih k-torki skupova $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ takvih da je $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_k \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$?
8.[II razred, B kategorija, državno 2014.]. Na papiru je nacrtana krunica. Aca i Voja naizmenično biraju po jednu tačku sa kružnice, pri čemu Aca tačku uvek boji plavom, a Voja uvek crvenom bojom (svaka tačka može biti odabrana najviše jednom). Aca počinje igru. U igri pobedjuje igrač koji prvi ostvari da medju tačkama koje je do tada obojio postoje tri koje čine temena jednakostraničnog ili temena jednakokrako-pravouglog trougla. Da li neki od igrača može igrati tako da pobedi bez obzira na to kako igra drugi igrač?
9.[I razred, B kategorija, državno 2011.]Ravan je obojena u 2 boje. Dokazati da postoji trougao sa stranicama dužina $1cm, \sqrt{3}cm$ i $2cm$ čija su sva temena iste boje.
10.[III razred, B kategorija, državno 2010.]Neka je S skup tačaka u ravni, takav

da za svake dve tačke $A, B \in S$ postoji tačka $C \in S$ na kružnici čiji je prečnik AB, različita od tačaka A i B. Dokazati da je skup S beskonačan.

11.[Princip uključenja i isključenja]Neka je $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Odrediti broj svih funkcija $f : S \to S$ koje nemaju fiksnih tačaka (tj. tačaka za koje je $f(x) = x$).

12.U senatu ima 30 senatora. Svaki od senatora je u svadji sa tačno šest drugih senatora. Na koliko načina može biti formirana tročlana komisija senatora tako da su svaka dva člana komisije medjusobno u svadji ili da nikoja dva člana komisije nisu u svadji?